GARA DI MATEMATICA ON-LINE (9/10/2023)

1. CALCOLO ENIGMATICO [86]

L'ultima sottrazione ci garantisce che $e=0$, mentre la somma in orizzontale ci assicura che $c=5$. Ne segue immediatamente, osservando il risultato della prima somma che $a+b=5$.

Ora dobbiamo trovare le due cifre a e b tali che $a+b=5$ e $\overline{ab}\cdot\overline{ba}$ ha come cifra delle decine b.
L'unico caso possibile è $23\cdot 32=736$. A questo punto risulta semplice completare lo schema:

$$\begin{array}{cccccccccc}
2 & 3 & \cdot & 3 & 2 & = & 7 & 3 & 6 \\
 & + & & & - & & & & - \\
6 & 0 & 2 & : & & 7 & = & 8 & 6 \\
\hline
6 & 2 & 5 & + & 2 & 5 & = & 6 & 5 & 0
\end{array}$$

La soluzione richiesta è $\overline{gd}=86$.

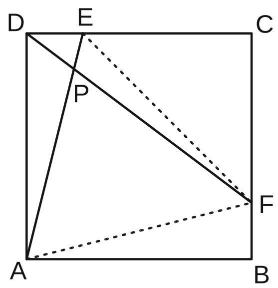
2. FURFANTI E CAVALIERI [2028]

Se c'è almeno un cavaliere, allora quelli seduti al suo fianco sono 5 furfanti. Ma il primo dei furfanti, per poter dire la frase deve necessariamente avere 4 furfanti e 1 cavaliere seduti al suo fianco.
Il giro del tavola potrà completarsi solo se abbiamo un multiplo di 6 di commensali. Il primo multiplo di 6 superiore a 2023 è 2028.

3. I QUATTRO APPARTAMENTI. [1032]

Confrontando le due frasi, abbiamo che il primo dialogo avviene tra Tullio e Pippo, mentre il secondo tra Cesare e Michele. Dalla prima si capisce che Tullio abita immediatamente sotto a Pippo. Cesare che è costretto a fare le scale con le stampelle, afferma che avrebbe potuto andargli meglio (se abitasse al piano terreno, ma anche peggio, quindi Cesare abita al primo o al secondo piano, mentre Tullio è uno degli inquilini che vive più in alto. L'unica possibilità è: Michele al piano terra, Cesare al primo piano, Tullio al secondo e Pippo al terzo.
La risposta richiesta è 1032.

4. UN QUADRATO [3157]



Tracciamo i segmenti EF e AF e consideriamo il quadrilatero $AFED$. Sia x l'area del triangolo DPE.
Per comodità di calcolo lavoriamo in m.

Siccome $A_{DCF}=\dfrac{4\cdot 3}{2}\ \mathrm{m}^2$ e $A_{ECF}=\dfrac{3\cdot 3}{2}\ \mathrm{m}^2$ allora $A_{PEF}=\dfrac{3}{2}-x$.

$A_{ADP}=A_{ADE}-x=2-x$.

$A_{PAF}=A_{ADF}-A_{PAD}=8-(2-x)=6+x$.

In un quadrilatero il prodotto delle aree opposte formate dalle diagonali è lo stesso:

$A_{DPE}\cdot A_{PAF}=A_{ADP}\cdot A_{PEF}$

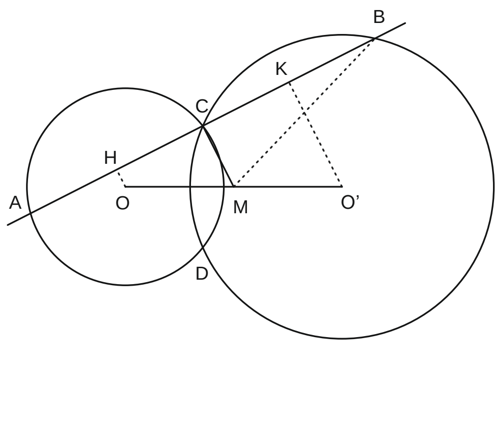
$x(6+x)=(2-x)\left(\dfrac{3}{2}-x\right)$ equazione che risolta porta a determinare

$x=\dfrac{6}{19}\ \mathrm{m}^2=\dfrac{6}{19}\cdot 100^2\ \mathrm{cm}^2\cong 3157{,}89\ \mathrm{cm}^2$

5. DUE CIRCONFERENZE [240]

Tracciano le perpendicolari alle corde AC e BC, per il Teorema di Talete $HC=CK$ e quindi:

$AC=BC=\sqrt{25^2-7^2}=24\ \mathrm{cm}=240\ \mathrm{mm}$.



6. UN TRIANGOLO [40]

Riferendoci alla figura a lato, uniamo i punti del segmento LM con i centri delle semicirconferenze e con il punto D.

Osserviamo che i triangoli BOL e $MO'C$ sono equilateri, mentre i triangoli LOR, ROD, DSO' e $SO'M$ sono isosceli.

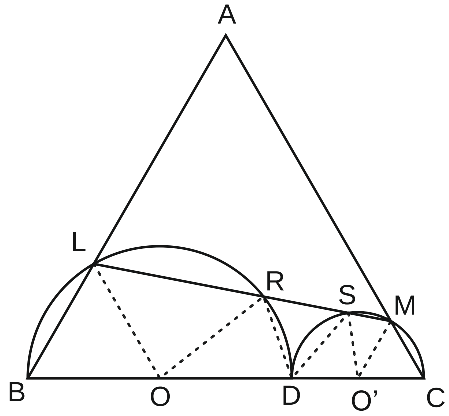
Sia $\alpha = O\hat{D}R$. Siccome $BLRD$ è ciclico, $L\hat{R}D = 120°$ e quindi $L\hat{R}O = R\hat{L}O = 120° - \alpha$. $A\hat{L}M = 180° - 60° - (120° - \alpha) = \alpha$, quindi $A\hat{M}L = 120° - \alpha$ e quindi $SMO' = \alpha$. $SDO' = 120 - \alpha$.

Abbiamo trovato due coppie di triangoli simili:

$LRO \approx SDO'$ e $ROD \approx SO'M$ entrambe con rapporto di similitudine 2 ed un triangolo equilatero RDS.

$SM : SO' = RD : OD$ e quindi $RD = 20 \text{ cm} = SD$, ma

$SD : SO' = LR : OD$ e quindi $LR = 40 \text{ cm}$.



7. UN TRAPEZIO [102]

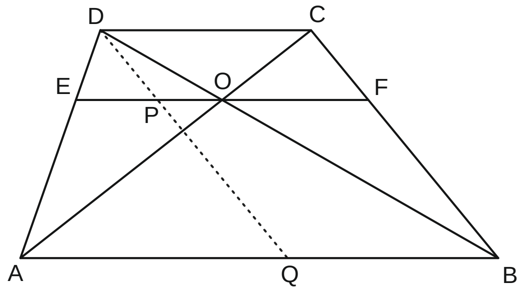
I triangoli DOC e AOB sono simili, quindi se $DC = 9 \text{ dm}$ allora $AB = 12 \text{ dm}$. Sia $EF = x$. Tracciamo il segmento DQ parallelo al lato obliquo BC e osserviamo i triangoli DEP e DAQ:

se $3h$ è l'altezza del triangolo DEP allora $7h$ è l'altezza del triangolo DAQ, quindi

$EP : 3h = AQ : 7h$ cioè

$(x-9) : 3h = (12-9) : 7h$ proporzione che ci permette di ricavare

$x = \dfrac{72}{7} \text{dm} = \dfrac{720}{7} \text{ cm} \cong 102,85 \text{ cm}$.

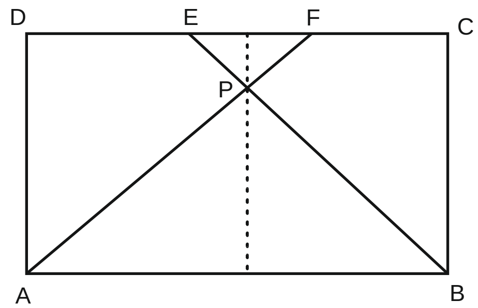


8. UN RETTANGOLO [408]

I triangoli APB ed EPF sono simili, il rapporto tra le loro aree è 16 quindi, posto $EF = x$, si ha $AB = 4x$ e posta uguale ad h l'altezza relativa a EF del triangolo EPF, si ha $BC = 5h$.

$A_{ABCD} = 4x \cdot 5h = 40 \cdot \dfrac{xh}{2} = 40 \cdot 24 = 960 \text{ cm}^2$

$A_{PBCF} = 960 - 144 - 24 - 384 = 408 \text{ cm}^2$.



9. SONO SOLO CALCOLI? [9999]

Osserviamo che $f(x) = 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 - x^4 = (x+1)^4 - x^4$, quindi

$f(9) + f(8) + ... + f(1) = 10^4 - 9^4 + 9^4 - 8^4 + ... + 2^4 - 1^4 = 10^4 - 1 = 9999$.

10. LA SEMPLIFICAZIONE [4045]

Analizziamo l'uguaglianza: $\dfrac{2023^3 + a^3}{2023^3 + b^3} = \dfrac{2023 + a}{2023 + b}$ fattorizzando correttamente il numeratore e il denominatore della prima frazione e mettendo $x = 2023$ per comodità:

$$\frac{\left(\cancel{x+a}\right)\left(x^2 - ax + a^2\right)}{\left(\cancel{x+b}\right)\left(x^2 - bx + b^2\right)} = \frac{\cancel{x+a}}{\cancel{x+b}}.$$

Siccome a e b sono positivi, possiamo semplificare, e quindi

$x^2 - ax + a^2 = x^2 - bx + b^2$ che semplificato diventa

$x(b-a) = (b-a)(b+a)$.

Ora l'equazione è verificata se $a = b$, oppure se $a + b = 2023$.

Il primo caso si verifica per 2023 casi, mentre il secondo per 2022, per un totale di 4045 coppie possibili.

11. FRAZIONI ALGEBRICHE [366]
Facciamo semplicemente i calcoli:
$$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{3}{y-x}=0$$
$$2y(y-x)+x(y-x)+3xy=0$$
$2y^2+2xy-x^2=0$. Dividiamo per x^2 risolviamo l'equazione direttamente in $\frac{y}{x}$:
$$2\left(\frac{y}{x}\right)^2+2\frac{y}{x}-1=0.$$
Scartando la soluzione negativa (vietata dalle ipotesi), abbiamo $\frac{y}{x}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ e quindi $1000\frac{y}{x}\cong 366,05$.

12. EFFE DI EFFE [90]
Sia d il grado di $f(x)$.
$f\left(f(x)\right)$ ha grado d^2, mentre $\left(f(x)\right)^2$ ha grado $2d$.
I due gradi devono essere uguali, quindi, non potendo essere $d=0$ dovrà essere $d=2$.
Sia $f(x)=ax^2+bx+c$.
Dobbiamo verificare per quali a, b e c accade che
$$\left(a(ax^2+bx+c)^2+b(ax^2+bx+c)+c\right)+ax^2+bx+c=(ax^2+bx+c)^2.$$
Il termini di quarto grado sono: a sinistra dell'uguale a^3x^4 mentre a^2x^4 a destra. L'unico modo per renderli uguali senza annullarli è $a=1$.
$$\left((x^2+bx+c)^2+b(x^2+bx+c)+c\right)+x^2+bx+c=(x^2+bx+c)^2.$$
Il termine noto è $\cancel{c^2}+bc+c+c=\cancel{c^2}$ e quindi $c=0$ oppure $b=-2$
Verifichiamo che il caso $b=-2$ non funziona.
$$\cancel{(x^2-2x+c)^2}-2(x^2-2x+c)+c+x^2-2x+c=\cancel{(x^2-2x+c)^2}$$
Il termine di secondo grado non si annulla.
Verifichiamo il caso $c=0$:
$$\cancel{(x^2+bx)^2}+b(x^2+bx)+x^2+bx=\cancel{(x^2+bx)^2}$$
$$bx^2+b^2x+x^2+bx=0$$
$(b+1)x^2+(b^2+b)x=0$ che ha soluzione solo per $b=-1$.
$f(x)=x^2-x$ e quindi $f(10)=10^2-10=90$.

13. CC [900]
Scomponiamo in fattori primi: $67500=2^2\cdot 3^3\cdot 5^4$.
Ora dobbiamo distribuire i fattori 2 tra a, b e c. $x_a+x_b+x_c=2$ e quindi (usando le combinazioni con ripetizione) $\binom{4}{2}=6$ modi.
Analogamente per i fattori 3 e 5: $x_a+x_b+x_c=3$ $\binom{5}{3}=10$ modi; $x_a+x_b+x_c=4$ $\binom{6}{4}=15$ modi.
In totale avremo $6\cdot 10\cdot 15=900$ possibili terne.

14. CARAMELLE PER I NIPOTI [222]
Diamo, intanto, una caramella a ciascun nipote. Ci restano 21 caramelle ancora da distribuire.
Se non ci fosse la condizione di distribuirne in numero diverso, la soluzione sarebbe $v+s+e=21$ (dove v sono le caramelle per Vittoria, s quelle per Sara ed e quelle per Enrico), che viene risolto dalle combinazioni con ripetizione: $\binom{23}{21}=253$.
Contiamo quante di queste hanno due numeri uguali:
$(0,0,21)$ -> 3 casi
$(1,1,19)$ -> 3 casi
...
$(10,10,1)$ -> 3 casi
Dove, però, dobbiamo stare attenti che la terna $(7,7,7)$ conta come caso unico.
La soluzione è $253-10\cdot 3-1=222$.

15. QUANTI SONO? [171+256-85=342]
I numeri cercati divisibili per "2" hanno "1" come prima cifra e "0" come cifra delle unità. Le altre 8 cifre possono essere scelte arbitrariamente e quindi in $2^8=256$ modi diversi.
I numeri cercati divisibili per "3" hanno "1" come prima cifra e poi devono altre 2 o 5 o 8 cifre "1".
$\binom{9}{2}+\binom{9}{5}+\binom{9}{8}=171$.
I numeri contati due volte sono quelli che sono contemporaneamente divisibili per "2" e per "3" e quindi sono $\binom{8}{2}+\binom{8}{5}+\binom{8}{8}=85$ visto che la cifra delle unità deve essere "0".
La risposta al problema è $171+256-85=342$.

16. È SOLO UNA RADICE [3]
Occupiamoci solo della parte $x=\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\ldots}}}}$ che possiamo anche scrivere $x=\sqrt{12+x}$ da ciò, elevando al quadrato, otteniamo $x^2=12+x$ equazione che ha come unica soluzione positiva $x=4$.
Il valore cercato è $\sqrt[5]{239+4}=\sqrt[5]{243}=3$.

17. QUADRATI [239]
Ciascuno dei tre termini potrebbe essere il doppio prodotto del quadrato di un binomio. Valutiamo i tre casi.
- $4^{21}=2\cdot 2^{41}$ è il doppio prodotto: allora $4^{100}=\left(2^{100}\right)^2$ e $4^n=\left(2^n\right)^2$ sono i due quadrati. In questo caso, accade che $41=100+n$. La soluzione $n=-59$ è negativa e non ammessa dal problema.
- $4^{100}=2\cdot 2^{199}$ è il doppio prodotto: allora $4^{21}=\left(2^{21}\right)^2$ e $4^n=\left(2^n\right)^2$ sono i due quadrati. In questo caso, accade che $199=21+n$. $n=178$.
- $4^n=2\cdot 2^{2n-1}$ è il doppio prodotto: allora $4^{100}=\left(2^{100}\right)^2$ e $4^{21}=\left(2^{21}\right)^2$ sono i due quadrati. In questo caso, accade che $2n-1=100+21$. $n=61$.
La soluzione richiesta è $178+61=239$.

18. IL MULTIPLO PIÙ GRANDE [2749]
Eseguendo la divisione, abbiamo $\frac{n^6+2023}{n+3}=n^5-3n^4+9n^3-27n^2+81n-243+\frac{2752}{n+3}$ che è intero solo se è intero $\frac{2752}{n+3}$. Il valore più grande per n verifica $n+3=2752$, cioè $n=2749$.

19. FIBONACCI DECIMALI [99]

Sia $x=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{F_i}{10^i}$ il valore cercato.

$\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{F_i}{10^i}=\frac{0}{1}+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{5}{10000}+\ldots$, sfruttando la definizione delle successione, possiamo scrivere:

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{F_i}{10^i}=\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{2}{1000}+\frac{3}{10000}+\frac{5}{100000}\ldots=\frac{1}{10}+\frac{0+1}{100}+\frac{1+1}{1000}+\frac{1+2}{10000}+\frac{2+3}{100000}\ldots=$$

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{2}{1000}+\frac{3}{10000}\ldots\right)+\frac{1}{100}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{2}{1000}+\ldots\right)$$

Deve accadere che $x=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}x+\frac{1}{100}x$ e quindi $x=\frac{10}{89}$.

20. TUTTI GLI ZERI [35]

Osserviamo che $1028^4=(1024+4)^4=(2^{10}+2^2)^4=2^{40}+4\cdot 2^{32}+6\cdot 2^{24}+4\cdot 2^{16}+2^8=2^{40}+2^{34}+3\cdot 2^{25}+2^{18}+2^8$. Scrivendo $3=2+1$ possiamo ulteriormente scrivere $2^{40}+2^{34}+2^{26}+2^{25}+2^{18}+2^8$. Ciascuna potenza di 2 è un "1" nella scrittura in base 2. Avremo $40-5=35$ "0".